# מועד א', סמסטר אביב תשע"ד - 104016
**17.7.14**

מס. סטודנט: | | | | | | | | | |  פקולטה: | | | | | | |

- משך המבחן : 3 שעות.
- השימוש בחומר עזר כלשהו ובמחשבונים אסור בהחלט.
- רשמו את כל תשובותיכם בדפים אלה. אפשר להשתמש בשני צידי הדף.
- בשאלות 1-4 יש **לנמק** היטב כל תשובה. תשובה לא מנומקת לא תחשב. בשאלות 5-8 יש לסמן את התשובה הנכונה. בכל שאלה יש רק סימון אחד נכון. שאלה שבה ישנם יותר סימונים מהמותר לא תיבדק. **אין לתת נימוקים בשאלות 5-8.** לא יינתנו נקודות על סימון שגוי.
- סך הנקודות במבחן הוא 101 אך הציון הסופי בקורס לא יעלה על 100.
- שאלת שיעורי הבית היא שאלה 4.

**ב ה צ ל ח ה !**

**טבלה לסימון תשובות נכונות בשאלות 5-8:**

| | שאלה מס' 5 | שאלה מס' 6 | שאלה מס' 7 | שאלה מס' 8 |
|---|---|---|---|---|
| א. | | | | |
| ב. | | | | |
| ג. | | | | |
| ד. | | | | |
| ה. | | | | |

**לבודקים: יש לרשום את הציונים בדף השער.**

**<u>שאלה מס' 1</u>** : (20 נקודות)

יהי $R^{2\times 2}$ מרחב המטריצות הממשיות מסדר $2\times 2$ מעל $R$, ויהי $R_2\left[x\right]$ מרחב הפולינומים הממשיים ממעלה קטנה או שווה ל- 2. תהי $T:R^{2\times 2}\to R_2\left[x\right]$ ההעתקה הלינארית המוגדרת ע"י:

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=(a-b+3c)+(a-b+4c)x+(a-b+2c+d)x^2$$

א. (5 נק') מצאו בסיס ומימד לגרעין של $T$.

ב. (5 נק') הוכיחו שאם $A\in Ker(T)$ אז גם $A^2\in Ker(T)$.

ג. (5 נק') מצאו בסיס לתמונה של $T$ כך שבכל פולינום בבסיס זה המקדם של $x$ הוא 5.

ד. (5 נק') האם קיימת העתקה ליניארית $S:R_2\left[x\right]\to R^{2\times 2}$ כך ש $S\circ T:R^{2\times 2}\to R^{2\times 2}$ היא העתקה על? אם כן, הביאו דוגמא להעתקה $S$ כזו, אם לא קיימת נמקו מדוע.

**שאלה מס' 2** : (30 נקודות)

יהי $T: R_2[x] \to R_2[x]$ האופרטור הלינארי המוגדר ע"י :

$$T(a+bx+cx^2) = (8a-2b-2c)+(3a+b-6c)x+(a-2b+5c)x^2$$

ויהי $E$ הבסיס הסדור הסטנדרטי של $R_2[x]$ : $E = \{1\ ,\ x\ ,\ x^2\}$ .

א. (5 נק') מצאו את $[T]_E$, המטריצה המייצגת את $T$ לפי הבסיס $E$.

ב. (5 נק') מצאו את הפולינום האופייני של $T$.

ג. (5 נק') מצאו את כל הערכים העצמיים של $T$, וכן את הריבוי האלגברי והריבוי הגיאומטרי של כל ערך עצמי.

ד. (9 נק') האם קיים בסיס $B$ של $R_2[x]$ כך ש $[T]_B$ (המטריצה המייצגת את $T$ ביחס לבסיס $B$) היא אלכסונית? אם כן, מצאו בסיס $B$ כזה וכן מצאו את $[T]_B$. אם לא קיים בסיס כזה, נמקו מדוע.

ה. (6 נק') נתון שקיים בסיס $C$ של $R_2[x]$ כך ש $[T]_C = \begin{pmatrix} 7 & \alpha & 0 \\ 0 & \beta & \gamma \\ 0 & \gamma & 0 \end{pmatrix}$. מצאו את $\alpha\ ,\ \beta\ ,\ \gamma$ .

**<u>שאלה מס' 3</u>** : (21 נקודות)

הוכיחו את הטענות הבאות:

א. (7 נק') יהי $V$ מרחב וקטורי מעל שדה $F$. נתון כי $\dim V = n$ כאשר $n \geq 2$ טבעי, וכן ש- $U$ , $W$ הם תת מרחבים לא טריוויאליים של $V$ (כלומר $U$ , $W$ שונים מ- $V$ ושונים ממרחב ה- 0) המקיימים $\dim(U \cap W) = n-1$ אז $U = W$.

ב. (7 נק') תהי $A$ מטריצה ריבועית מעל שדה $F$. אם $v \in F^n$ הוא וקטור עצמי של $A$, אז $v$ הוא וקטור עצמי של $A^2$. מצאו גם את הערך העצמי המתאים.

ג. (7 נק') יהי $V$ מרחב מכפלה פנימית מעל $R$. יהיו $u, w \in V$ כך ש $\|u\| = \|w\| = 1$ ויהי $\alpha \in R$. אז הווקטורים $u + \alpha w$ ו- $u - \alpha w$ אורתוגונליים אם"ם $\alpha^2 = 1$.

**<u>שאלה מס' 4</u>** : (10 נקודות) שאלת שיעורי בית

הוכיחו את הטענות הבאות:

א. (5 נק') אם $A$ ממשית מטריצה לא ריבועית אז לפחות אחת מתוך שתי המטריצות $AA^t$ ו- $A^tA$ לא הפיכה.

ב. (5 נק') אם $B,C$ הן שתי מטריצות ממשיות מסדר $5\times5$ המקיימות $BC+CB=0$ אז לפחות אחת מתוך שתי המטריצות $B$ ו- $C$ לא הפיכה.

**בשאלות 8-5 יש לסמן את התשובה הנכונה בטבלה (בכל שאלה רק תשובה אחת)**

**שאלה מס' 5** : (5 נקודות)

נתון:

$A$ מטריצה ממשית מסדר $5\times5$ ;

$u,v,w\in R^5$ הם שלושה וקטורי עמודה ;

$W$ = מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית $A\bar{x}=0$ .

אזי:

א. אם $u,v,w$ הם 3 עמודות בלתי תלויות ליניארית של $A$ אז $\dim W=2$ .

ב. אם $rank(A)=3$ ו- $W=span\{u,v,w\}$ אז $u,v,w$ תלויים ליניארית.

ג. אם $rank(A)=2$ ו- $u,v,w$ בלתי תלויים ליניארית אז $W=span\{u,v,w\}$ .

ד. אם $W=span\{u,v,w\}$ אז $rank(A)=2$ .

ה. אם $rank(A)=2$ אז $W=span\{u,v,w\}$ .

**שאלה מס' 6** : (5 נקודות)

יהי $V=R^4$ ויהיו $U$ ו- $W$ תת מרחבים של $V$. נתון כי:

(i) $\dim U=3$ .

(ii) $(1,0,0,0)\in W$ .

(iii) $U\cap W=span\{(1,1,1,1)\ ,\ (2,2,1,-1)\ ,\ (0,0,1,3)\}$ .

אזי:

א. $\dim W=2$ .

ב. $R^4=U\oplus W$ .

ג. $\dim(U+W)=4$ .

ד. $U\cap W=U$ .

ה. $U\cap W=W$ .

**שאלה מס' 7** : (5 נקודות)

נתונה המטריצה המרוכבת הבאה:

$$B=\begin{pmatrix} 2-3i & 1+i & 0 \\ 2 & i & 0 \\ 7i & -5 & 2i \end{pmatrix}$$

כן נתונה מטריצה $A\in C^{3\times3}$ הפיכה המקיימת: $A^3B^2A^{-1}=-2iB^3\left(AB\right)^{t}$ , אז $\det(A)$ שווה ל:

א. $-32i$ ; ב. $-16i$ ; ג. $-2i$ ; ד. $8i$ ; ה. $64i$

**<u>שאלה מס' 8</u>** : (5 נקודות)

יהי $V = R^{2\times 2}$ ויהיו $E$ ו- $B$ שני הבסיסים הסדורים הבאים של $V$:

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

תהי $P$ מטריצת המעבר מהבסיס $B$ לבסיס $E$ (כלומר המטריצה $P$ המקיימת $P[v]_E = [v]_B$).

אז $(P)_{4,3}$, האיבר בשורה 4 ועמודה 3 של $P$, שווה ל:

א. $\frac{1}{4}$ ; ב. $-\frac{1}{2}$ ; ג. $-1$ ; ד. 1 ; ה. 0